

Chapitre 12 : Suites arithmétiques et géométriques

I. Suites arithmétiques

1) Définition

Définition : Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Méthode : Montrer qu'une suite est arithmétique

- 1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 15 - 2n$ est-elle arithmétique ?
- 2) La suite (v_n) définie par : $v_n = n^2 + 10$ est-elle arithmétique ?

$$1) u_{n+1} - u_n = 15 - (2n+1) - 15 + 2n \\ = -2 \text{ qui est constant}$$

(u_n) est arithmétique de raison -2 .

$$2) v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 10 - (n^2 + 10) \\ = 2n + 1 \text{ qui dépend de } n$$

(v_n) n'est pas arithmétique.

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .
Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 + nr$

Démonstration au programme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r \\ \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = r$$

$$\text{donc } u_1 - u_0 = r$$

$$u_2 - u_1 = r$$

$\vdots$

$$u_n - u_{n-1} = r$$

On additionne ces n lignes :

$$u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1} = nr \\ \Leftrightarrow u_n - u_0 = nr$$

$$\Leftrightarrow u_n = u_0 + nr$$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_3 = -6$ et $u_9 = 42$.

- 1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n) .
- 2) Exprimer u_n en fonction de n .

$$\begin{aligned}
 1) \text{ La raison est de } 8 \text{ car } & u_9 - u_3 = (9 - 3) \times r \\
 & u_9 - u_3 = 42 - (-6) = 48 \\
 & \Rightarrow r = \frac{48}{9 - 3} = \frac{48}{6} = 8 \\
 & u_0 = u_3 - 3r = -6 - 3 \times 8 = -6 - 24 = -30 \\
 2) & -30 + 8n
 \end{aligned}$$

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$
 donc si $r > 0$ (u_n) croissante
 si $r < 0$ (u_n) décroissante

Exemple :

La suite arithmétique (u_n) définie par $u_n = 3 - 2n$ est

$$r = -2 < 0$$

donc (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

II. Suites géométriques

1) Définition

Définition : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.

Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Méthode : Montrer qu'une suite est géométrique.

La suite (u_n) définie par : $u_n = 6 \times 3^n$ est-elle géométrique ?

$$u_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{6 \times 3^{n+1}}{6 \times 3^n} \\
 &= \frac{6 \times 3^n \times 3}{6 \times 3^n} \\
 &= 3 \text{ qui est constant}
 \end{aligned}$$

donc (u_n) est géométrique de raison 3

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme $u_0 \neq 0$.
 Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration au programme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \quad \text{car } u_n \neq 0$$

$$\text{Donc } \frac{u_1}{u_0} = q$$

$$\frac{u_2}{u_1} = q$$

...

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = q$$

on multiplie ces n lignes :

$$\frac{\cancel{u_1}}{u_0} \times \frac{\cancel{u_2}}{\cancel{u_1}} \times \dots \times \frac{\cancel{u_n}}{\cancel{u_{n-1}}} \times \frac{u_n}{\cancel{u_{n-1}}} = q^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n}{u_0} = q^n$$

$$\Leftrightarrow u_n = u_0 \times q^n$$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_4 = 3$ et $u_7 = 192$.
 Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n) .

$$u_7 = u_4 \times q^3$$

$$\Leftrightarrow q^3 = \frac{u_7}{u_4}$$

$$\Leftrightarrow q^3 = 64$$

$$\Leftrightarrow q = \sqrt[3]{64}$$

$$\Leftrightarrow q = 4$$

$$u_4 = u_0 \times 4^4$$

$$u_0 = \frac{u_4}{4^4}$$

$$= \frac{3}{256}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3}{256} \times 4^n$$

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul u_0 .

Pour $u_0 > 0$:

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Pour $u_0 < 0$:

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

Démonstration dans le cas où $u_0 > 0$:

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$ avec $u_0 > 0$ et $q > 0$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times q - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n (q - 1) \end{aligned}$$

Comme $u_0 \times q^n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $q - 1$.

Donc (u_n) croissante sur $\mathbb{N}$ si $q > 1$ et décroissante sur $\mathbb{N}$ si $q \in]0; 1[$.

Remarque : Si la raison q est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

croissante sur $\mathbb{N}$
décroissante

III. Sommes de termes consécutifs

1) Cas d'une suite arithmétique

Propriété : $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

Alors : $\sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Cas d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$\sum_{i=0}^n q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration au programme :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^n) &= 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n} - q - \cancel{q^2} - \cancel{q^3} - \dots - \cancel{q^n} - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .

Alors : $\sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.